PART3　高次方程式の解法

例題

次の方程式を解け。

(1)　$x^3+8=0$

(2)　$x^4-4x^2-5=0$

(3)　$2x^3-5x^2-x+6=0$

(4)　$x^4+3x^3-5x^2-3x+4=0$

Point Pickup

練習

次の方程式を解け。

(1)　$x^3 = -1$　　(2)　$x^4 + 7x^2 + 12 = 0$　　(3)　$2x^4 + 5x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$

第４講　PART3 確認問題

次の方程式を解け。

1　$x^3=27$

$$x=\boxed{ア},\ \frac{\boxed{イウ}\pm\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}i}{\boxed{カ}}$$

2　$x^4+x^2-20=0$

$$x=\pm\boxed{キ},\ \pm\sqrt{\boxed{ク}}i$$

3　$x^4+x^3-10x^2-4x+24=0$

$$x=\boxed{ケ},\ \boxed{コサ},\ \boxed{シス}$$

（ただし，$\boxed{コサ}>\boxed{シス}$）

PART3　高次方程式の解法

例題

次の方程式を解け。

(1)　$x^3+8=0$　　(2)　$x^4-4x^2-5=0$

(3)　$2x^3-5x^2-x+6=0$　　(4)　$x^4+3x^3-5x^2-3x+4=0$

(1)　$x^3+8=0$　　$(x+2)(x^2-2x+4)=0$　　よって $x=-2,\ 1\pm\sqrt{3}\,i$

(2)　$x^2=t$ とおくと　$t^2-4t-5=0$　　$(t-5)(t+1)=0$

つまり　$(x^2-5)(x^2+1)=0$

よって　$x^2-5=0$　または　$x^2+1=0$

したがって　$x=\pm\sqrt{5}$，$\pm i$

(3)　$P(x)=2x^3-5x^2-x+6$ とおくと

$$P(-1)=2\cdot(-1)^3-5\cdot(-1)^2-(-1)+6=0$$

より，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

2	−5	−1	6	−1
	−2	7	−6	
2	−7	6	0	

$$P(x)=(x+1)(2x^2-7x+6)$$
$$=(x+1)(2x-3)(x-2)$$

$P(x)=0$ より　$(x+1)(2x-3)(x-2)=0$

したがって　$x=-1,\ \dfrac{3}{2},\ 2$

(4)　$P(x)=x^4+3x^3-5x^2-3x+4$ とおくと

$$P(1)=1^4+3\cdot1^3-5\cdot1^2-3\cdot1+4=0$$

より，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

1	3	−5	−3	4	1
	1	4	−1	−4	
1	4	−1	−4	0	

よって　$P(x)=(x-1)(x^3+4x^2-x-4)$

$Q(x)=x^3+4x^2-x-4$ とおくと

$$Q(1)=1^3+4\cdot1^2-1-4=0$$

より，$Q(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

1	4	−1	−4	1
	1	5	4	
1	5	4	0	

よって　$Q(x)=(x-1)(x^2+5x+4)=(x-1)(x+1)(x+4)$

$P(x)=0$ より $(x-1)^2(x+1)(x+4)=0$

したがって $x=1,\ -1,\ -4$

練習

次の方程式を解け。

(1)　$x^3=-1$　　(2)　$x^4+7x^2+12=0$　　(3)　$2x^4+5x^3+3x^2-x-1=0$

(1)　$x^3=-1$　　$x^3+1=0$　　$(x+1)(x^2-x+1)=0$　　$x=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

(2)　$x^2=t$ とおくと　$t^2+7t+12=0$　　$(t+3)(t+4)=0$

つまり　$(x^2+3)(x^2+4)=0$

よって　$x^2+3=0$　または　$x^2+4=0$

したがって　$x=\pm\sqrt{3}\,i,\ \pm 2i$

(3)　$P(x)=2x^4+5x^3+3x^2-x-1$ とおくと

$$P(-1)=2\cdot(-1)^4+5\cdot(-1)^3+3\cdot(-1)^2-(-1)-1=0$$

より，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

2	5	3	−1	−1	−1
	−2	−3	0	1	
2	3	0	−1	0	

よって　$P(x)=(x+1)(2x^3+3x^2-1)$

$Q(x)=2x^3+3x^2-1$ とおくと

$$Q(-1)=2\cdot(-1)^3+3\cdot(-1)^2-1=0$$

より，$Q(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

2	3	0	−1	−1
	−2	−1	1	
2	1	−1	0	

よって　$Q(x)=(x+1)(2x^2+x-1)$

$\qquad\quad=(x+1)^2(2x-1)$

$P(x)=0$ より　$(x+1)^3(2x-1)=0$

したがって　$x=-1,\ \dfrac{1}{2}$

第 4 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イウ：－3，エ：3，オ：3，カ：2

[解説]

$x^3=27$ より

$$x^3-27=0$$

$$(x-3)(x^2+3x+9)=0$$ [A]

よって，$x-3=0$　または　$x^2+3x+9=0$

したがって

$$\boldsymbol{x=3,\ \frac{-3\pm3\sqrt{3}\,i}{2}}$$

[A]　高次方程式 $P(x)=0$ の解法
因数分解の公式や因数定理を用いて，$P(x)$ を 1 次式または 2 次式の積の形に因数分解する。

2

[正解] キ：2，ク：5

[解説]

$x^2=t$ とおくと与えられた方程式は [B]

$$t^2+t-20=0$$

$$(t-4)(t+5)=0$$

つまり

$$(x^2-4)(x^2+5)=0$$

よって，$x^2-4=0$　または　$x^2+5=0$

したがって

$$\boldsymbol{x=\pm2,\ \pm\sqrt{5}\,i}$$

[B]　複 2 次式の因数分解は，$x^2=t$ とおくと，2 次式の因数分解に帰着する。

3 [正解] ケ：2，コサ：−2，シス：−3

[解説]

$P(x)=x^4+x^3-10x^2-4x+24$ とおくと

$$P(2)=2^4+2^3-10\cdot2^2-4\cdot2+24=0$$

より，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。[C]

$P(x)$ を $x-2$ で割ると次のようになる。

1	1	−10	−4	24	2
	2	6	−8	−24	
1	3	−4	−12	0	

よって

$$P(x)=(x-2)(x^3+3x^2-4x-12)$$

$Q(x)=x^3+3x^2-4x-12$ とおくと

$$Q(2)=2^3+3\cdot2^2-4\cdot2-12=0$$

より，$Q(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$Q(x)$ を $x-2$ で割ると次のようになる。

1	3	−4	−12	2
	2	10	12	
1	5	6	0	

よって

$$Q(x)=(x-2)(x^2+5x+6)$$
$$=(x-2)(x+2)(x+3)$$

$P(x)=0$ より

$$(x-2)^2(x+2)(x+3)=0$$ [D]

したがって　$\boldsymbol{x=2,\ -2,\ -3}$

[C]　高次方程式 $P(x)=0$ の解法
因数分解の公式や因数定理を用いて，$P(x)$ を１次式または２次式の積の形に因数分解する。

[D]　$P(x)=0$ は４次方程式なので，４個の解をもつ。$x=2$ が重解となり，２個の解と考える。
一般に，複素数の範囲において，n 次方程式は n 個の解をもつ。